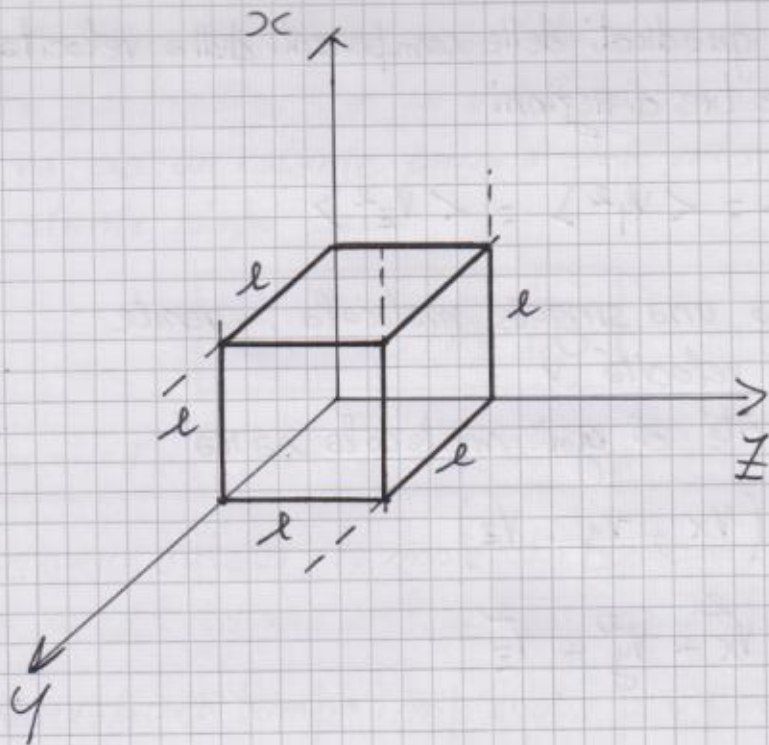




Ci proponiamo come obiettivo ricavare l'equazione di stato dei gas perfetti.

A tale scopo consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali ($Oxyz$) ed un cubo di spigolo l che contiene al suo interno un gas ideale.

- Le molecole sono puntiformi, vale a dire il loro volume è trascurabile rispetto al volume del recipiente.
- Le molecole sono in moto continuo e casuale.
- Fra un urto e l'altro le molecole non interagiscono fra loro.
- Gli urti fra le molecole e le molecole e le pareti sono perfettamente elastici.
- Il tempo degli urti è trascurabile rispetto al tempo fra un urto ed il successivo.

Nessuna delle tre direzioni dello spazio è privilegiata.

La media dei quadrati delle componenti della velocità è la stessa nelle tre direzioni

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

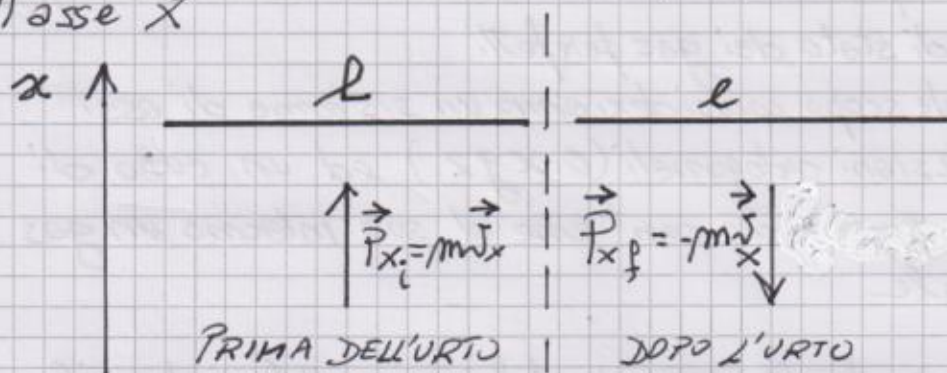
Consideriamo una singola molecola, avente massa m e velocità v

Il vettore velocità sarà

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Consideriamo la parete del cubo perpendicolare all'asse x



Quando una molecola urta tale parete dovremo considerare soltanto la componente lungo x della velocità.

Prima dell'urto la molecola avrà una quantità di moto

$$p_x = m v_x$$

Dopo l'urto, la molecola invertirà il verso della sua velocità ed il vettore quantità di moto lungo x avrà lo stesso modulo e la stessa direzione ma verso opposto

La variazione della quantità di moto della particella in un lasso di tempo che va da un istante prima dell'urto ed un istante dopo sarà

$$\Delta p = 2 m \dot{v}_x$$

TEMPO FRA DUE URTI CONTRO LA STESSA PARETE

Dopo avere urtato, la molecola percorre una distanza pari a $2L$ prima del successivo urto

L'intervallo di tempo impiegato per percorrere tale distanza è

$$\Delta t = \frac{2L}{\dot{v}_x}$$

I ripetuti urti della molecola contro la parete faranno sì che su quest'ultima agisca una forza il cui valore medio sarà

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2 m \dot{v}_x}{\frac{2L}{\dot{v}_x}} = \frac{m \dot{v}_x^2}{L}$$

$$F = \frac{m \dot{v}_x^2}{L}$$

DALLA FORZA ALLA PRESSIONE

Per definizione la pressione si ottiene come rapporto fra la forza esercitata e l'area della superficie su cui tale forza agisce

$$A = L^2 ; \quad P = \frac{F}{A} = \frac{m \dot{v}_x^2}{L \cdot L^2} = \frac{m \dot{v}_x^2}{L^3}$$

$$p = \frac{m \bar{v}_x^2}{L^3}$$

Si ha inoltre $L^3 = V$

In ultima analisi la pressione prodotta da una singola molecola è

$$p = \frac{m \bar{v}_x^2}{V}$$

L'EFFETTO DI TUTTE LE MOLECOLE

Come già detto $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$

Sommando i contributi di tutte le molecole si ha

$$\sum_{i=1}^N \bar{v}_x^2 = N \langle \bar{v}_x^2 \rangle$$

Infatti, procedendo a ritroso il valore quadratico medio lungo x

$$\langle \bar{v}_x^2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{v}_{xi}^2}{N} = \frac{\bar{v}_{x1}^2 + \bar{v}_{x2}^2 + \dots + \bar{v}_{xn}^2}{N}$$

La pressione dovuta al contributo di tutte le molecole sarà

$$p = \frac{m N \langle \bar{v}_x^2 \rangle}{V}$$

da cui

$$pV = Nm \langle \bar{v}_x^2 \rangle$$

ISOTROPIA DEL MEZCO

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

$$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_y^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_z^2 \rangle =$$

$$= \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

$$m \langle v_x^2 \rangle = k_B T$$

$$PV = Nm \langle v_x^2 \rangle = Nm \frac{k_B T}{m}$$

$$= N \cancel{m} \frac{R}{N \cancel{m}} = nRT$$

$$\boxed{PV = nRT}$$