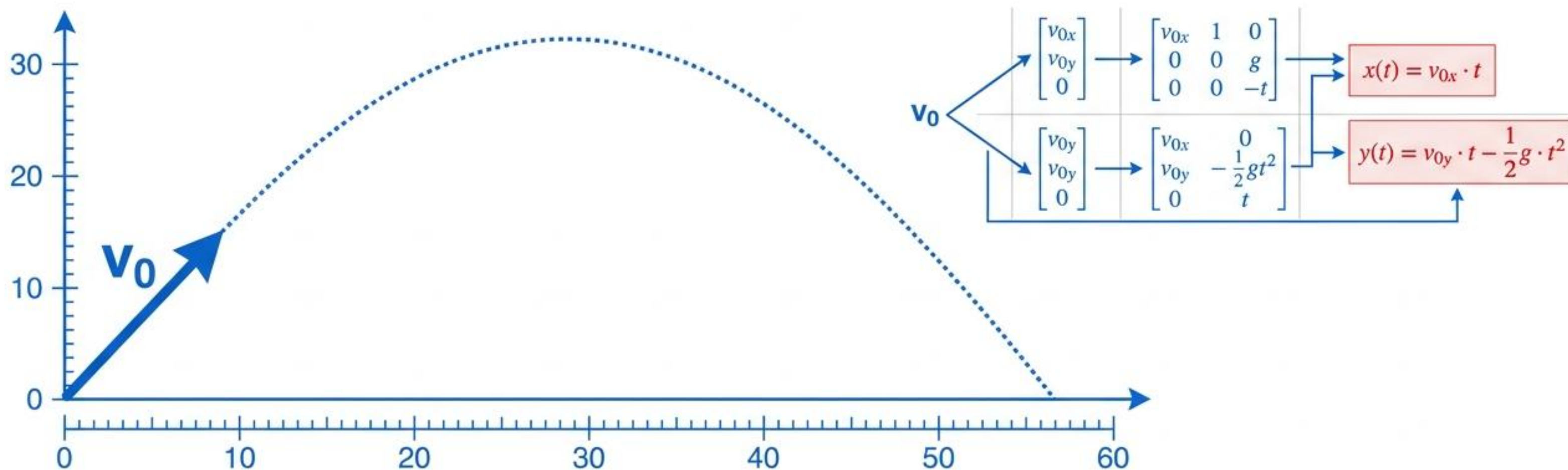
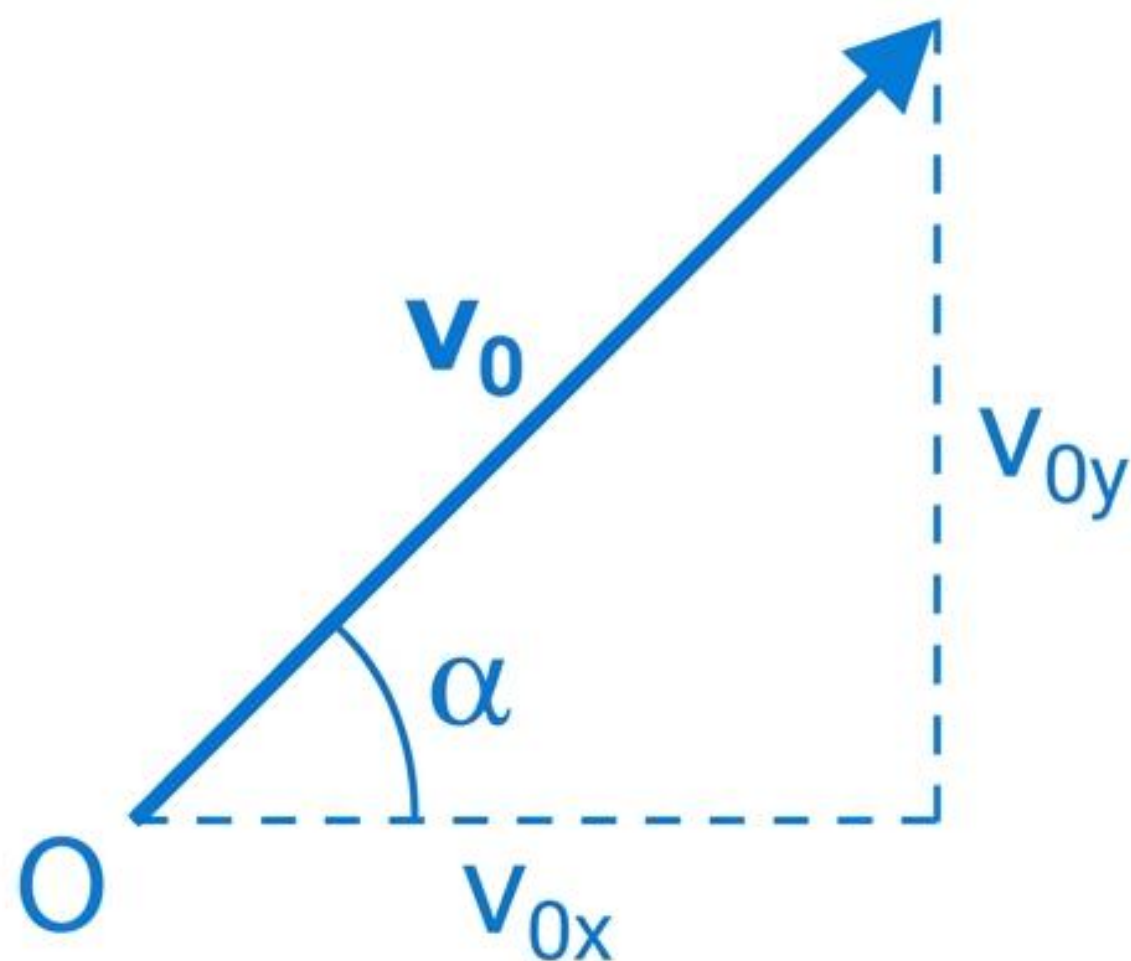


Il Moto Parabolico

Dalla scomposizione dei vettori alle leggi orarie:
guida completa alle derivazioni cinematiche.





Le Condizioni Iniziali

Supponiamo che un oggetto venga lanciato dall'origine degli assi con una velocità iniziale v_0 , che forma un angolo α con il semiasse positivo delle ascisse.

Il triangolo rettangolo delle velocità ci permette di ricavare le componenti:

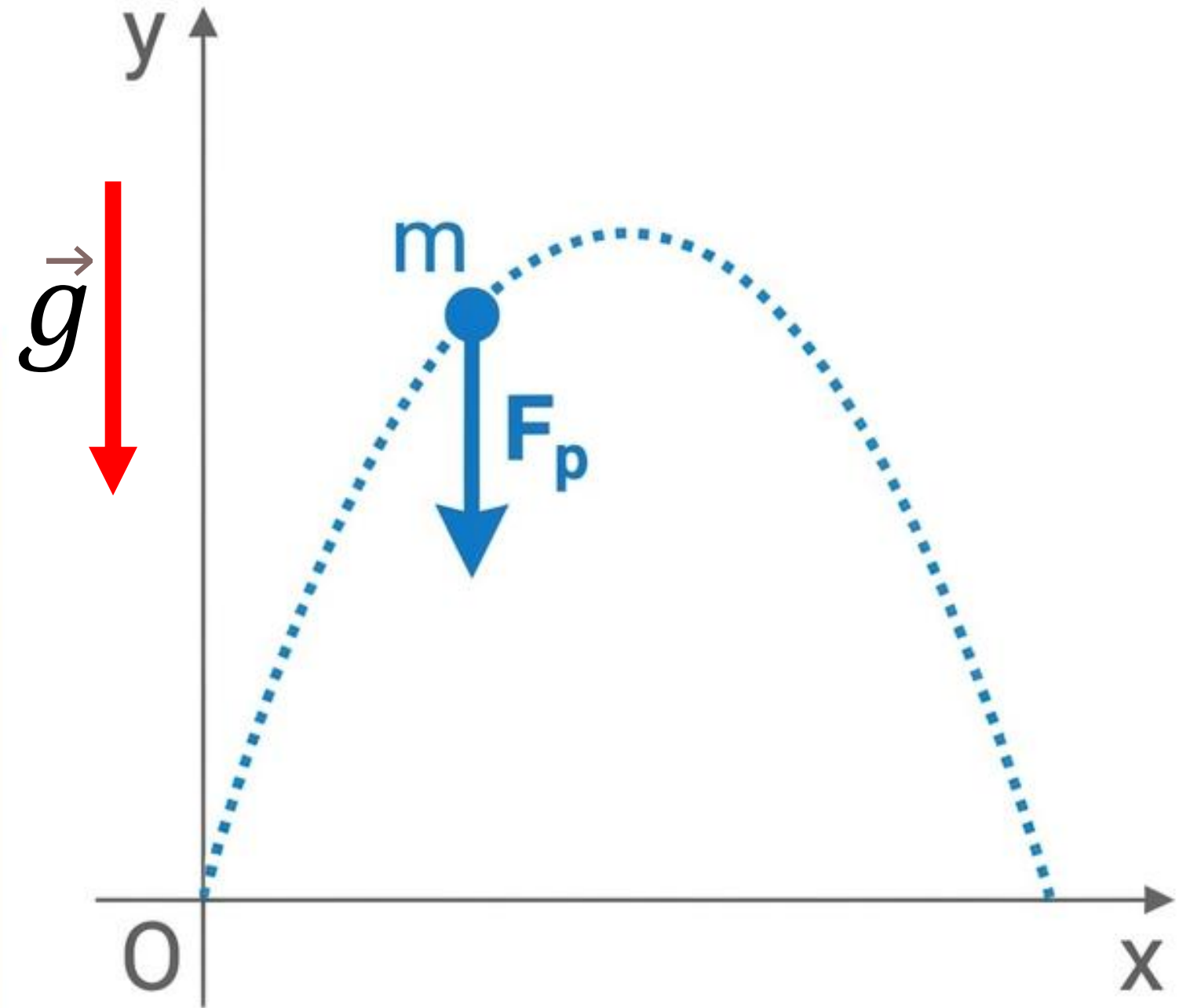
$$v_{0x} = v_0 * \cos(\alpha)$$

$$v_{0y} = v_0 * \sin(\alpha)$$

L'Azione della Gravità Iniziali

L'unica forza agente sull'oggetto mentre si trova in volo è la forza peso (F_p).

- La forza peso agisce soltanto lungo l'asse y.
- Di conseguenza, il moto dell'oggetto si scompone in due moti indipendenti che avvengono simultaneamente. La loro composizione produce la traiettoria parabolica.



Le Leggi del Moto: Asse X vs Asse Y

Asse X

- **Tipo di Moto:** Moto Rettilineo Uniforme (MRU)
- **Accelerazione:** $a = 0$
- **Legge oraria (Posizione):**

$$x = v_{0x} * t$$

Asse Y

- **Tipo di Moto:** Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato (MRUA)
- **Accelerazione:** $a = -g$ (costante, verso il basso)
- **Velocità:** $v_y = v_{0y} - gt$
- **Legge oraria (Posizione):**

$$y = v_{0y} * t - (1/2) * g * t^2$$

Dimostrazione: Isolamento della Variabile Tempo

Step 1

Partiamo dalla legge del moto orizzontale e isoliamo il tempo t :

$$x = v_{0x} \cdot t \xrightarrow{\text{Isoliamo } t} t = \frac{x}{v_{0x}}$$

Step 2

Sostituiamo questo valore di t nell'equazione del moto verticale:

$$y = v_{0y}(t) - \frac{1}{2}g(t)^2$$

Sostituzione

$$y = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$$

L'Equazione della Traiettoria (Parabola)

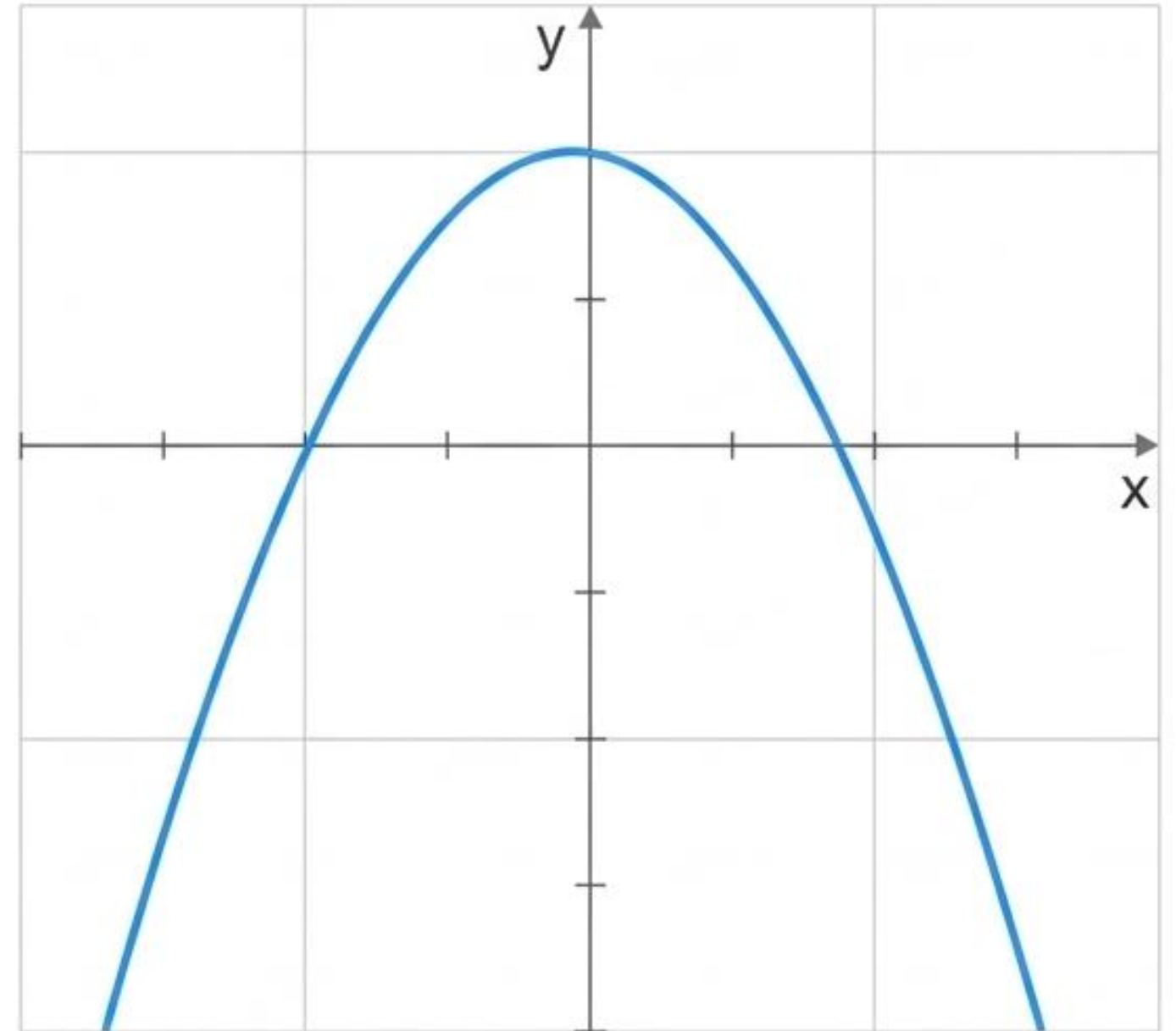
Sviluppiamo l'equazione precedente:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2}g\left(\frac{x^2}{v_{0x}^2}\right)$$

Riordinando i termini otteniamo un'equazione di secondo grado ($y = ax^2 + bx$):

$$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x$$

Il coefficiente negativo di x^2 conferma analiticamente che la traiettoria è una parabola con concavità rivolta verso il basso.



Analisi del Punto di Altezza Massima (M)

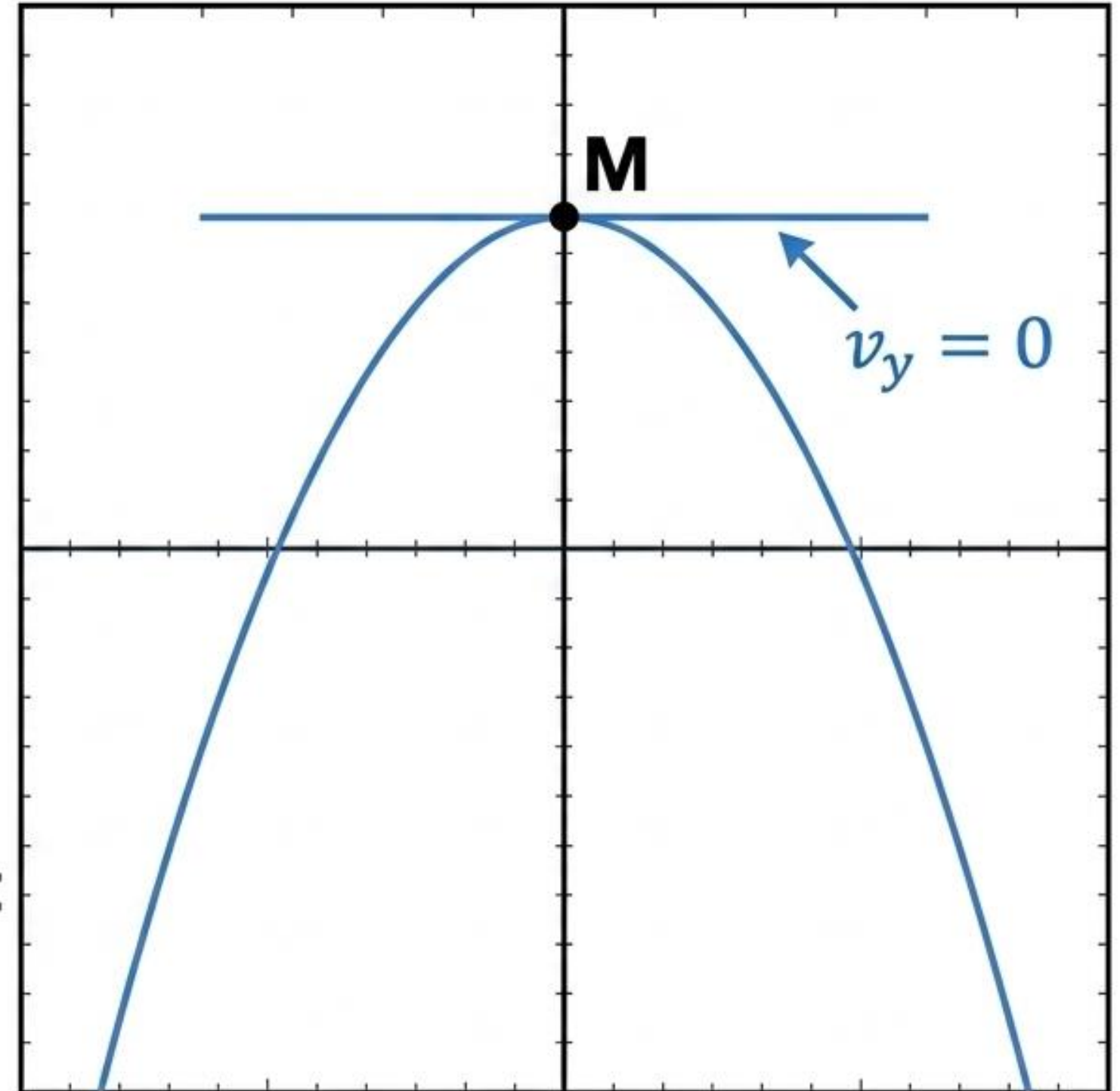
Quando l'oggetto raggiunge il vertice della parabola (punto M), smette di salire e inizia a scendere. In questo esatto istante, la sua velocità verticale si annulla completamente.

Chiamiamo t' l'istante in cui **si raggiunge l'altezza massima**.

Condizione fisica al vertice: $v_y = 0$

Sostituendo nell'equazione della velocità:

$$0 = v_{0y} - gt'$$



Calcolo del Tempo di Volo (t_v)

Fase 1: Tempo di salita.

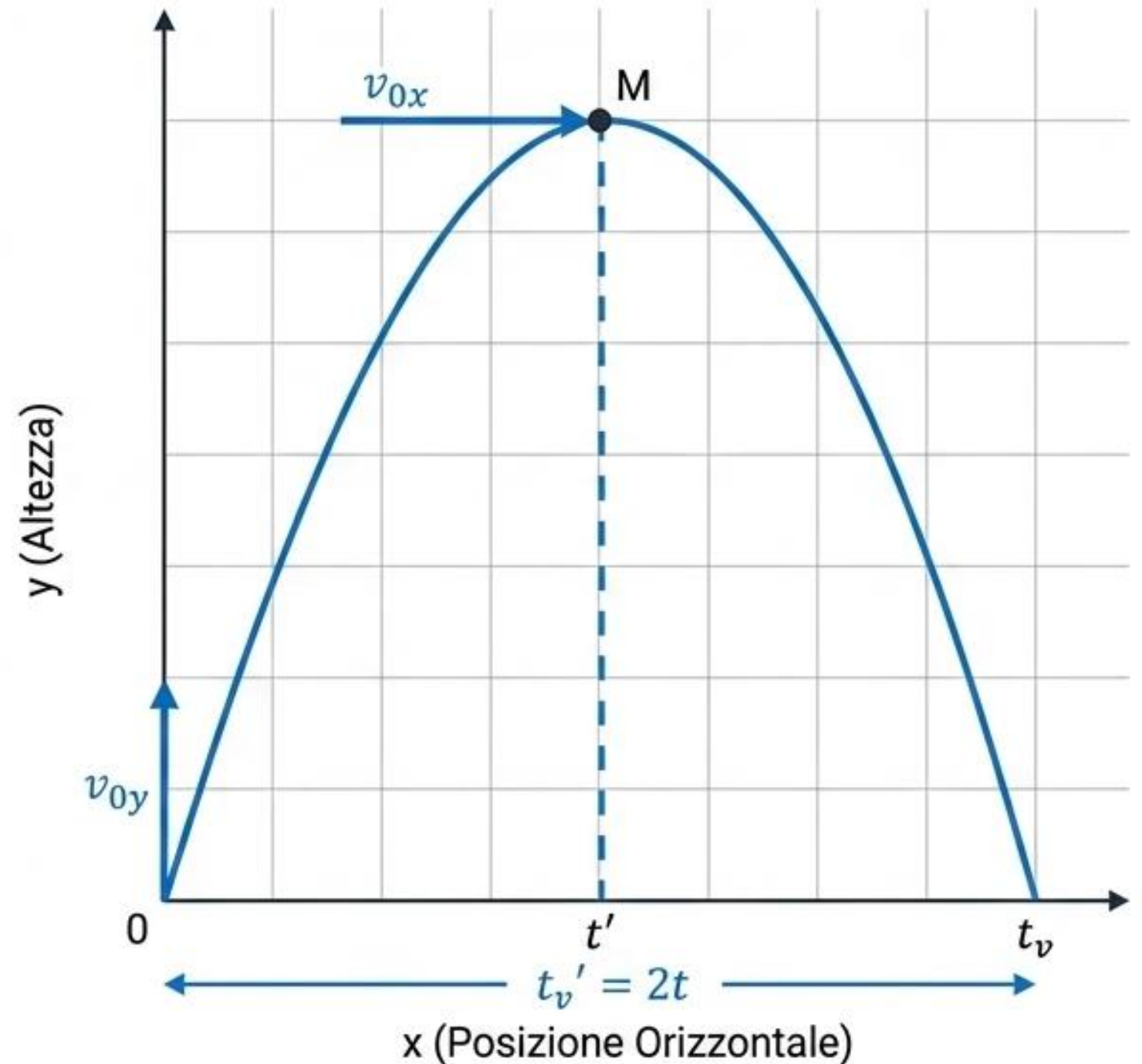
Ricaviamo t' dall'equazione precedente:

$$v_{0y} = gt' \rightarrow t' = \frac{v_{0y}}{g}$$

Fase 2: Tempo totale.

Poiché la parabola tracciata su una superficie piana è perfettamente simmetrica, il tempo totale di volo (t_v) è esattamente il doppio del tempo impiegato per raggiungere il vertice.

$$t_v = \frac{2v_{0y}}{g}$$

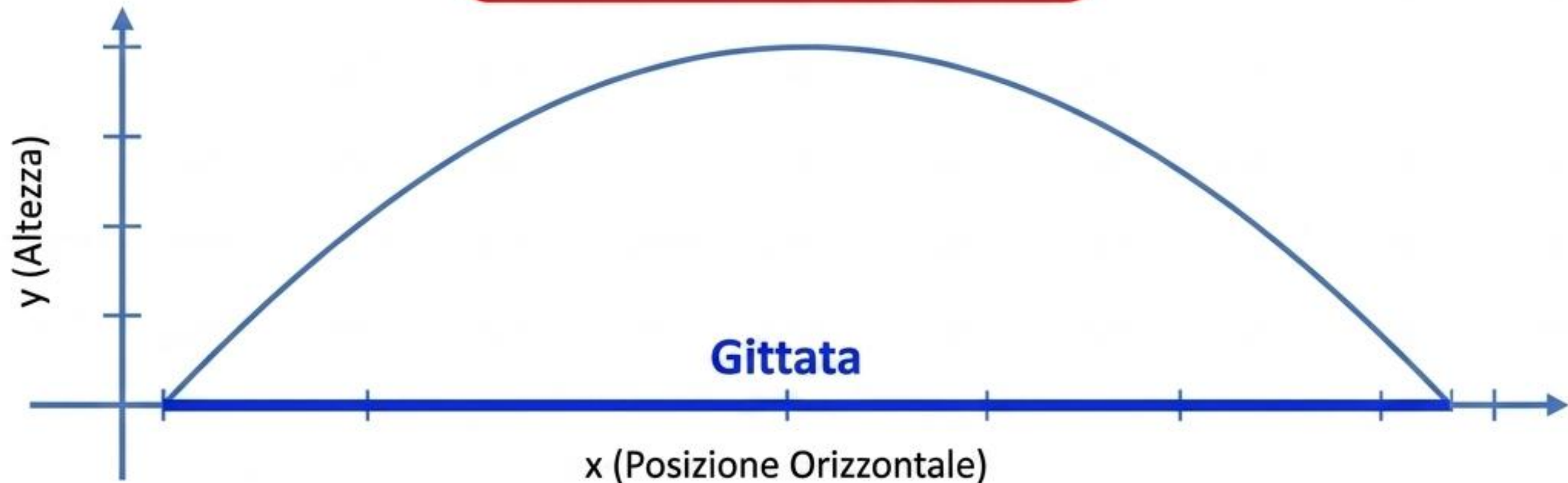


Calcolo della Gittata (Distanza Massima)

Per calcolare la distanza orizzontale massima raggiunta dall'oggetto, sostituiamo l'intero tempo di volo (t_v) nella legge oraria dell'asse x.

$$x = v_{0x} * t \xrightarrow{\text{Sostituiamo } t_v} \textbf{Gittata} = v_{0x} * \frac{2v_{0y}}{g}$$

$$\textbf{Gittata} = \frac{2 * v_{0x} * v_{0y}}{g}$$



Calcolo dell'Altezza Massima ($h_{\max}$)

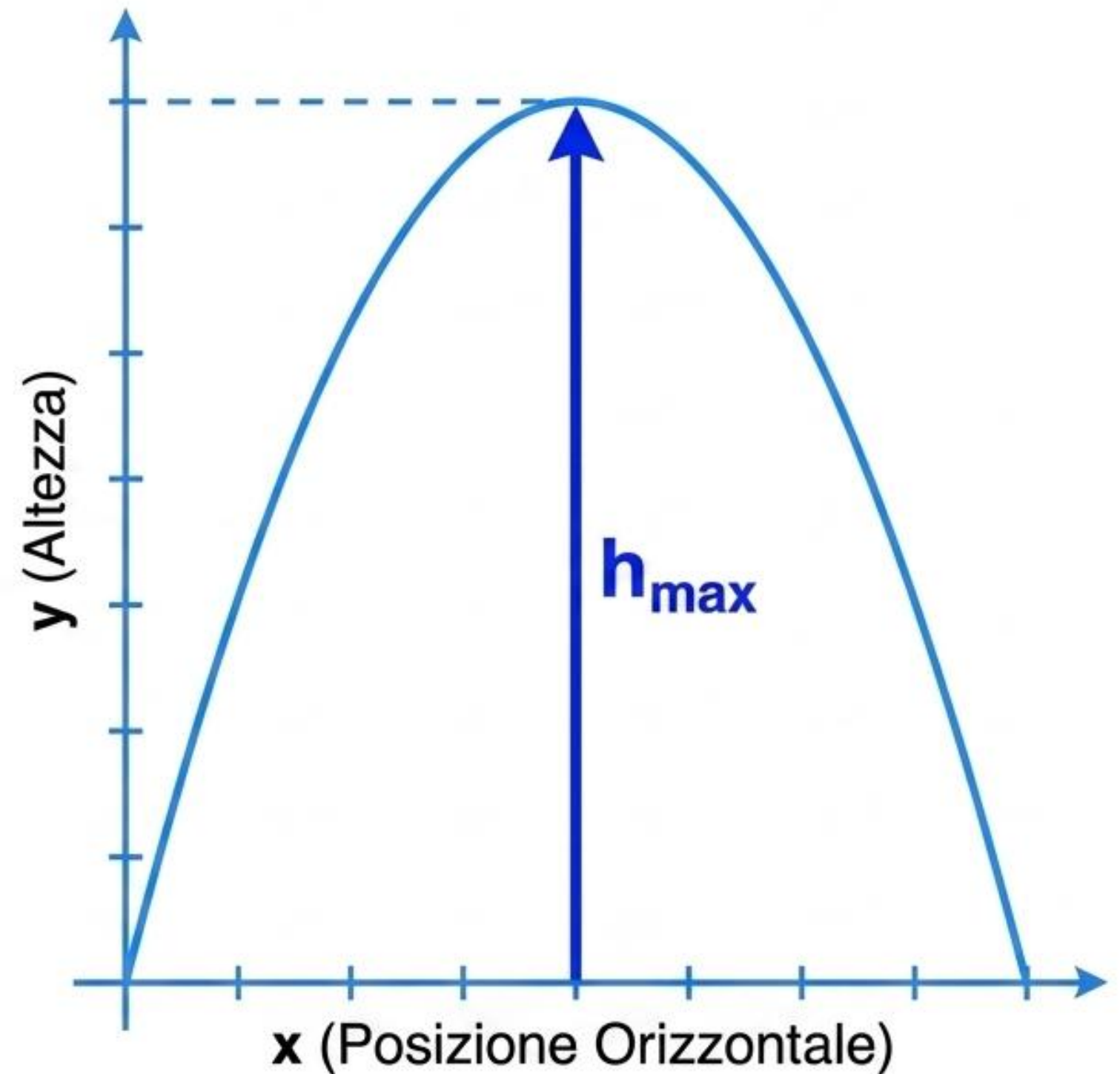
Per ottenere l'altezza massima, inseriamo il tempo di salita ($t' = v_{0y} / g$) nell'equazione della posizione lungo y:

$$y = v_{0y} * t - \frac{1}{2}g * t^2$$

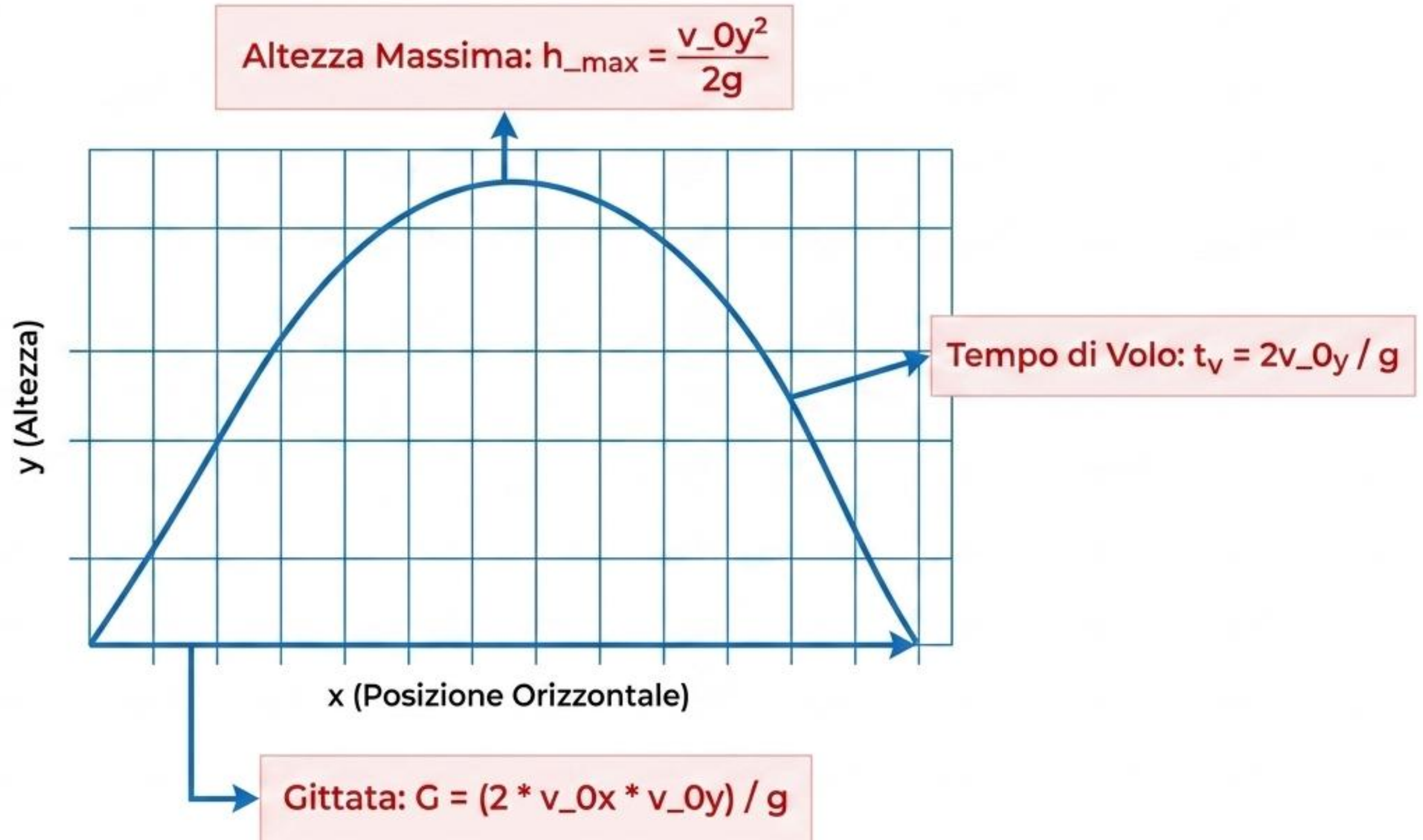
$$h_{\max} = v_{0y} * \frac{v_{0y}}{g} - \frac{1}{2}g * \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2$$

$$h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{g} - \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

$$h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$



Riepilogo: Le 3 Formule Fondamentali



Applicazione Pratica: Impostazione del Problema

Un oggetto viene scagliato dal suolo con una velocità di 30 m/s con un angolo di 45 gradi rispetto al suolo. Calcolare la gittata, l'altezza massima e il tempo di volo.

Step 1: Calcolo delle Componenti

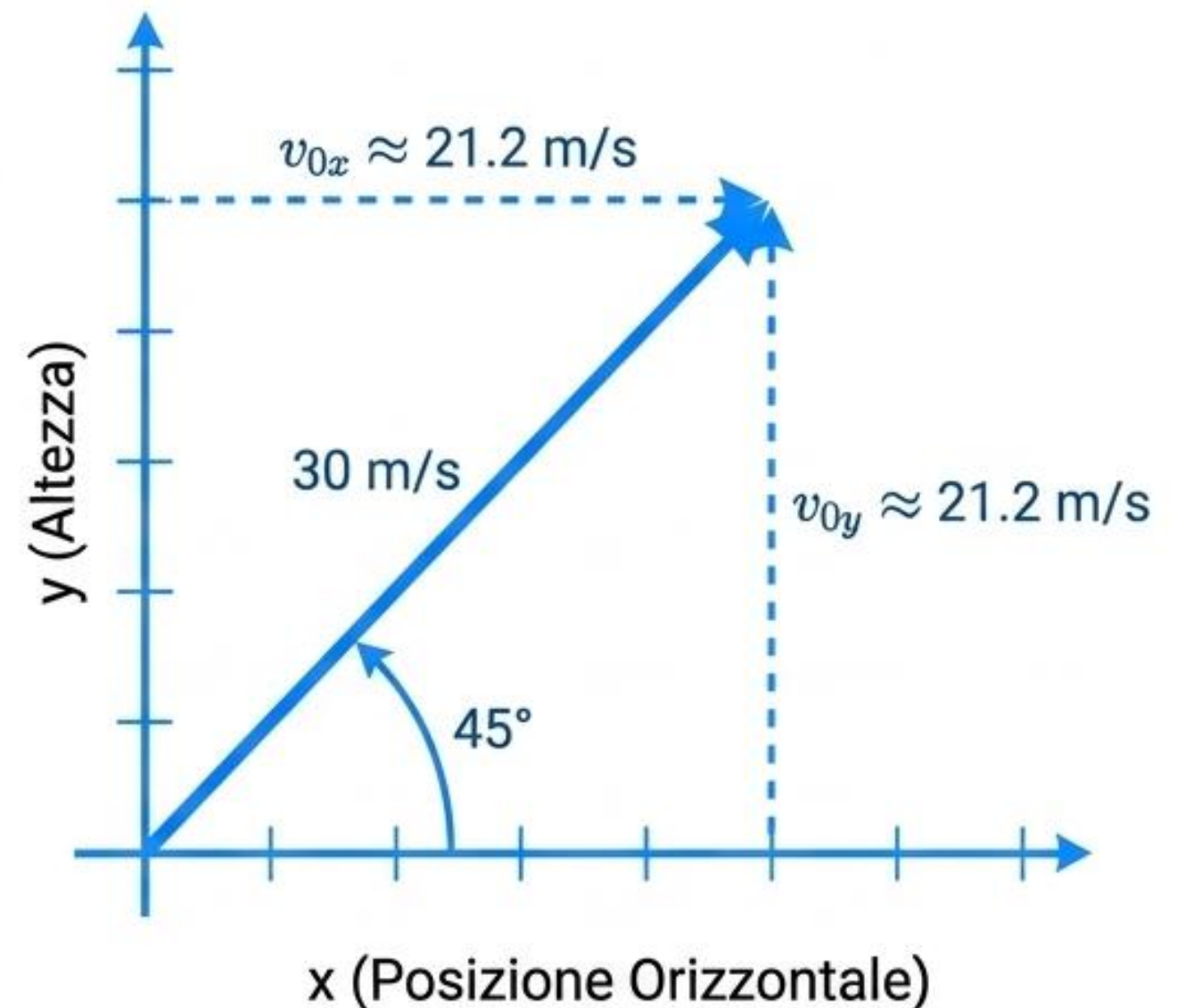
Sappiamo che per $\alpha = 45$ gradi, $\sin(45) = \cos(45) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$v_{0x} = 30 \cdot \cos(45) = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2} \approx 21.2 \text{ m/s}$$

→ $v_{0x} \approx 21.2 \text{ m/s}$

$$v_{0y} = 30 \cdot \sin(45) = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2} \approx 21.2 \text{ m/s}$$

→ $v_{0y} \approx 21.2 \text{ m/s}$



Risoluzione e Risultati Finali

Tempo di Volo

$$t_v = \frac{2v_{0y}}{g}$$

$$t_v = \frac{2 * 21.2}{9.81}$$

$$t_v \approx 4.3 \text{ s}$$

Gittata

$$G = \frac{2 * v_{0x} * v_{0y}}{g}$$

$$G = \frac{2 * 21.2^2}{9.81}$$

$$G \approx 91.6 \text{ m}$$

Altezza Massima

$$h_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g}$$

$$h_{max} = \frac{(21.2)^2}{2 * 9.81}$$

$$h_{max} \approx 22.9 \text{ m}$$

