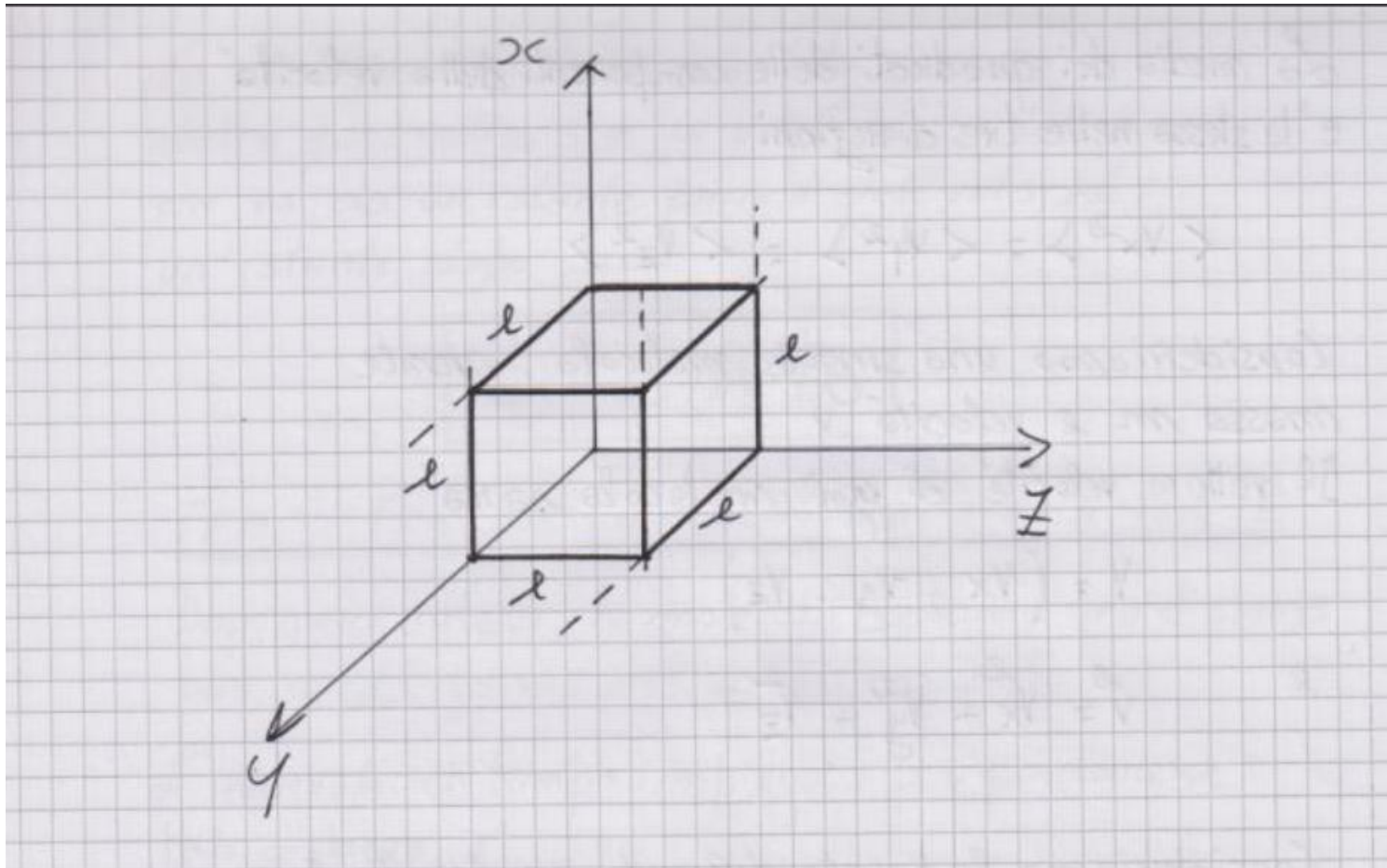


Equazione di Stato dei Gas Perfetti

Dalla meccanica molecolare alla legge $PV = nRT$: una derivazione completa basata sul modello cinetico dei gas.



Il Modello del Gas Ideale

Consideriamo un cubo di spigolo l in un sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$, contenente un gas ideale. Le molecole soddisfano queste ipotesi fondamentali:

Puntiformi

Volume trascurabile rispetto al recipiente

Moto casuale

In moto continuo e casuale

Nessuna interazione

Tra un urto e l'altro non interagiscono

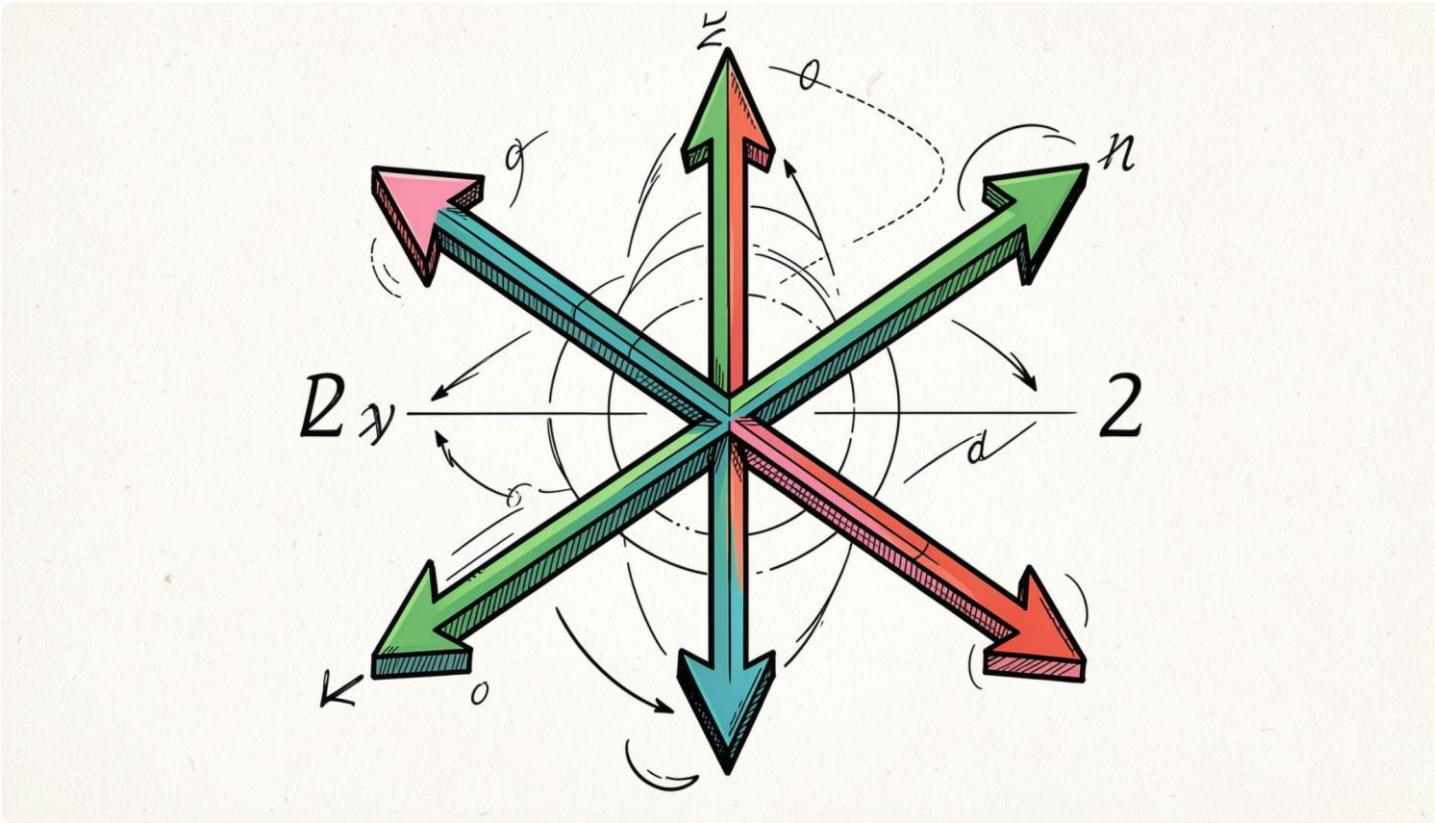
Urti elastici

Con le pareti: perfettamente elastici

Tempo d'urto

Trascurabile rispetto al tempo tra due urti

Isotropia dello Spazio



Nessuna delle tre direzioni dello spazio è privilegiata. La media dei quadrati delle componenti della velocità è la stessa nelle tre direzioni:

$$v_x^2 = v_y^2 = v_z^2$$

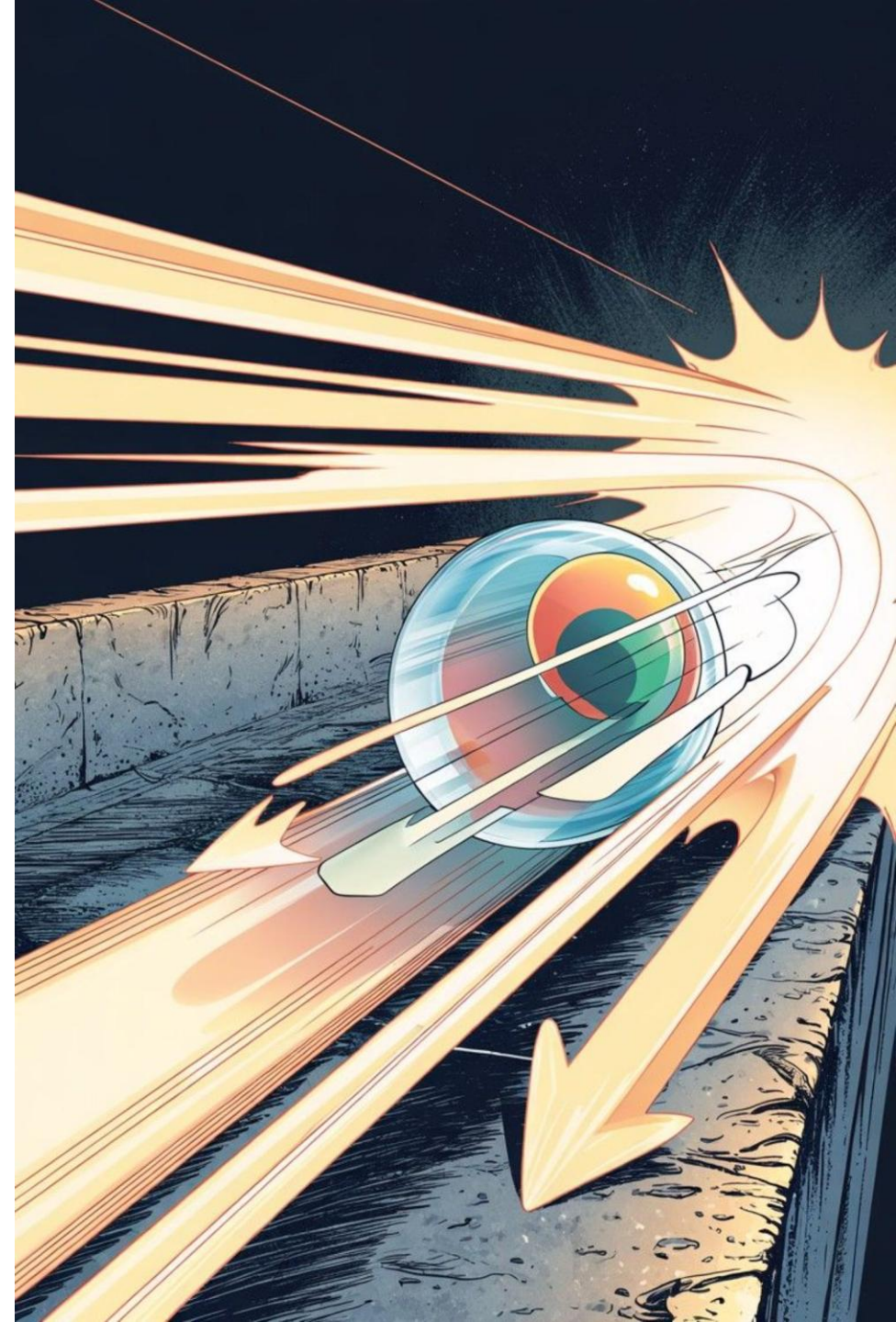
Per una singola molecola di massa m e velocità v , il vettore velocità è:

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad \text{e} \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

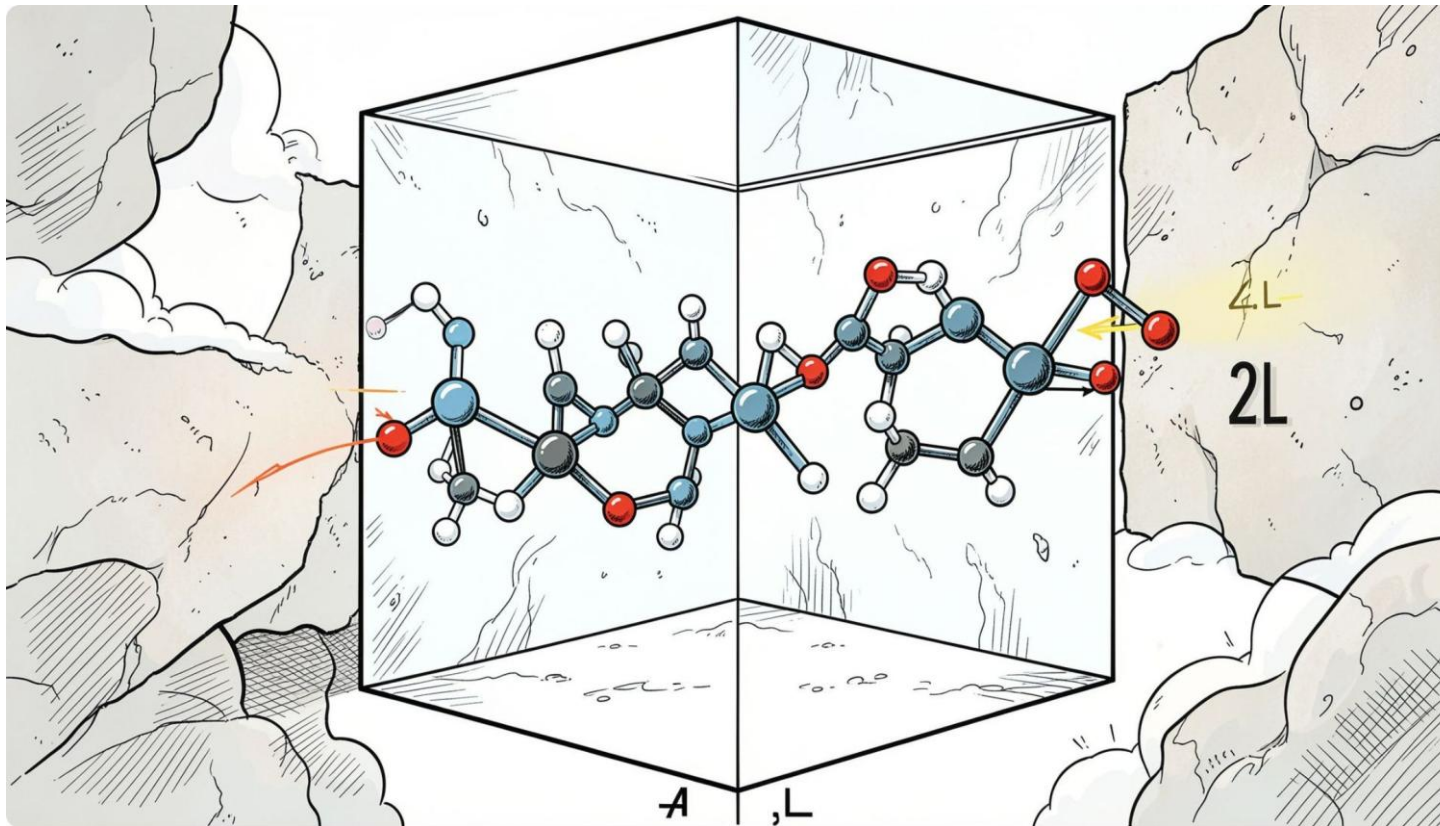
L'Urto con la Parete

Consideriamo la parete perpendicolare all'asse x . Solo la componente x è rilevante. Prima dell'urto la quantità di moto è $p_x = mv_x$ e dopo l'urto la molecola inverte il verso:

$$\Delta p = p_{x,f} - p_{x,i} = (-mv_x) - (mv_x) = -2mv_x$$



Tempo fra Due Urti



Dopo aver urtato la parete, la molecola percorre una distanza pari a $2L$ prima del successivo urto contro la stessa parete.

L'intervallo di tempo impiegato è:

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

I ripetuti urti fanno sì che sulla parete agisca una **forza media**.

Dalla Forza alla Pressione

La forza media esercitata dalla molecola sulla parete è:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{\frac{2L}{v_x}} = \frac{mv_x^2}{L}$$

La pressione è forza divisa per area ($A = L^2$):

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mv_x^2}{L L^2} = \frac{mv_x^2}{L^3} = \frac{mv_x^2}{V}$$

☐ Poiché $L^3 = V$, la pressione prodotta da una singola molecola è $p = \frac{mv_x^2}{V}$.

Il Contributo di Tutte le Molecole

Sommando i contributi di tutte le N molecole e usando la definizione di valor quadratico medio:

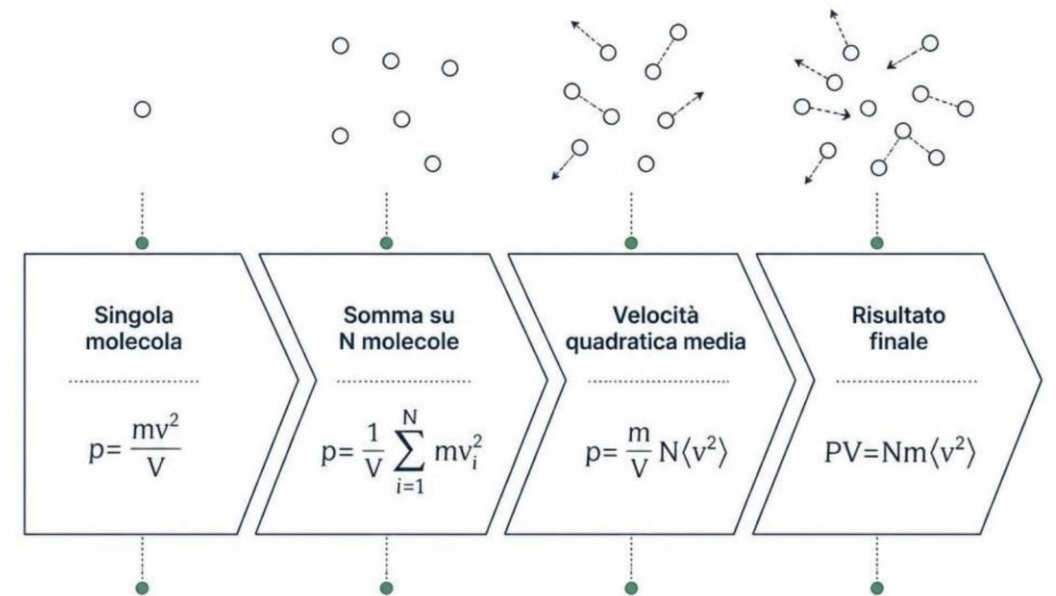
$$\sum_{i=1}^N v_{xi}^2 = N v_x^2$$

La pressione totale diventa:

$$p = \frac{mN v_x^2}{V}$$

Da cui si ottiene:

$$PV = Nm v_x^2$$



Isotropia ed Energia Cinetica

Sfruttando l'isotropia del mezzo, l'energia cinetica media si distribuisce equamente sulle tre componenti:

$$\frac{1}{2}m \overline{v_x^2} + \frac{1}{2}m \overline{v_y^2} + \frac{1}{2}m \overline{v_z^2} = \frac{3}{2}m \overline{v_x^2} = \frac{3}{2}k_B T$$

Teorema di Equipartizione

Ogni grado di libertà contribuisce con $\frac{1}{2}k_B T$ all'energia media

Relazione chiave

Da cui segue: $m \overline{v_x^2} = k_B T$

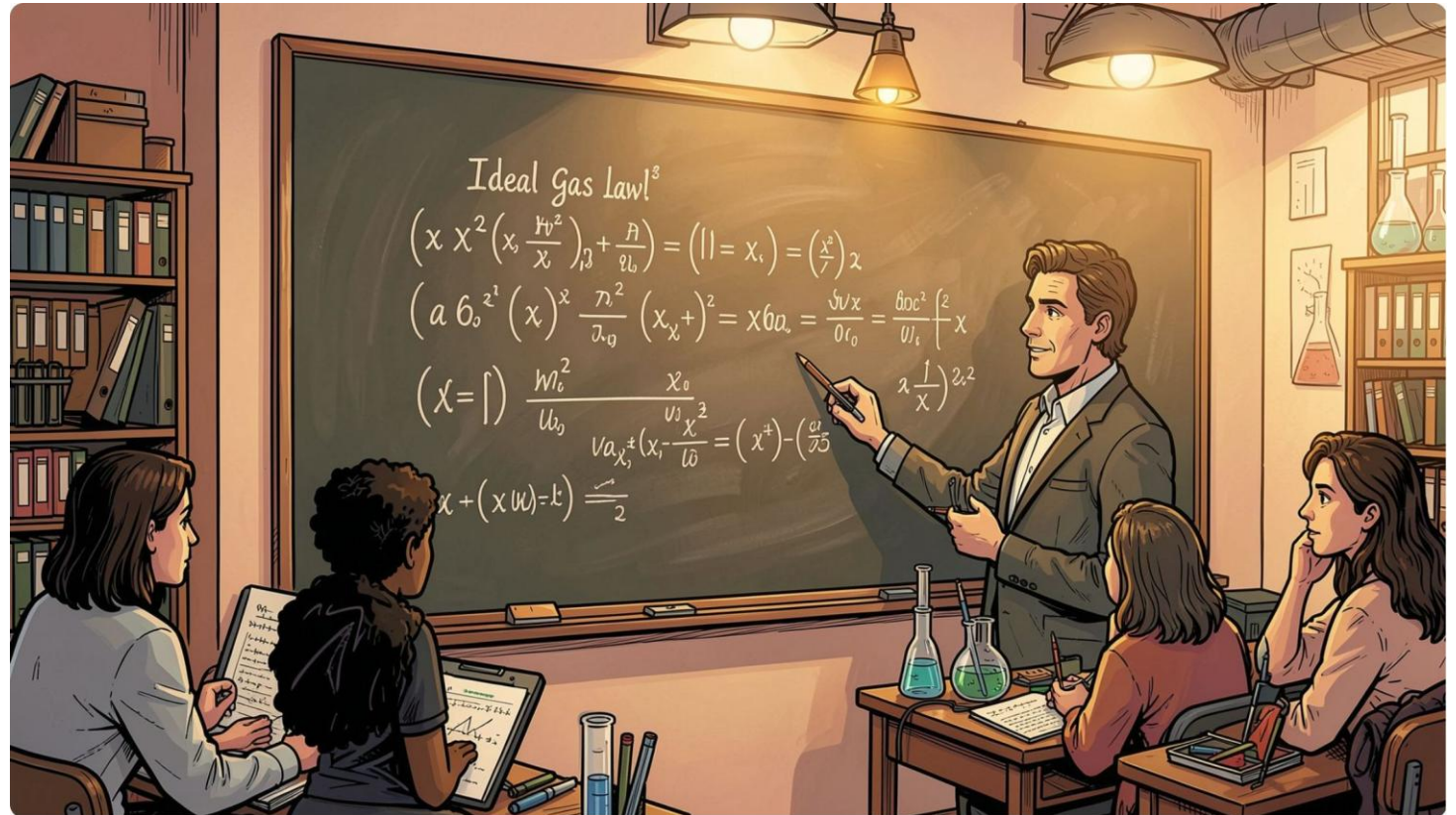
Verso l'Equazione di Stato

Sostituendo $m v_x^2 = k_B T$
nell'espressione di pV :

$$PV = Nm v_x^2 = Nk_B T$$

Ricordando che $k_B = R/N_A$ e che
 N/n è il numero di moli):

$$PV = N \frac{R}{N_A} T = nRT$$



IDEAL Gas ALH

$$N_b f^e = \frac{1}{F} \left(\frac{RT}{F} \right) = N_b$$

$$PV = nRT$$

LiAl₃ocn Gat H(iny)!

Il Risultato Finale

$$PV = nRT$$

L'equazione di stato dei gas perfetti è stata derivata rigorosamente a partire dalle ipotesi del modello cinetico molecolare, collegando grandezze macroscopiche (pressione, volume, temperatura) al comportamento microscopico delle molecole.

P

Pressione

V

Volume

nRT

Energia termica